Quantenmechanik I

PD Stefan Kettemann

I. Einführung:

Planck - Einstein - Hypothese:

Elektromagnetische Strahlung existiert in Energiequanten

$$E = h\nu$$ ν Frequenz des Lichts

$$h = 6.6 \cdot 10^{-34}\,Js = 4.14 \cdot 10^{-15}\,eVs$$

Strahlung eines schwarzen Körpers der Temperatur T

Bsp.: Sonne $T_S = 5800K$

Energiedichte $u(\nu,T) = \frac{\text{Emittierte Energie}}{\text{Volumen} \cdot \text{Frequenz}}$

Experiment: $\boxed{u(\nu,T) \sim \nu^2 T}$ für $\nu < \frac{k_B T}{h}$

Rayleigh - Jeans

$$\boxed{u(\nu,T) \sim \nu^3 \, e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}} \qquad \nu > \frac{k_B T}{h}$$

k_B = Boltzmann-konst. Wien'sche Strahlungsgesetz

Wien'scher Versuch einer Theorie

1. Boltzmannverteilung:
   Wahrscheinlichkeit, eine Mode der Energie E emittiert $P \sim e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$

2. Anzahl der Moden pro Volumen und Frequenz
   $$n_\nu = \frac{8\pi\,\nu^2}{c^3}$$
   (Ü: Herleitung für Kasten des Volumens L^3)

3. $E = h\nu$

$$\Rightarrow \boxed{u_{Wien}(\nu,T) = n_\nu \cdot h\nu \cdot e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}}$$
$$= \frac{8\pi h}{c^3}\,\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Problem $u_{Wien}(\nu,T) \sim \nu^3$ $\lightning$ für $h\nu < k_B T$

2. Jeans - Rayleigh: Gleichverteilungssatz der Thermodynamik
   Jede Mode hat die Energie $f \cdot k_B T \frac{1}{2}$

$f =$ Freiheitsgrad $=$ Polarisation $= 2$

$$U_{JR} = n_\nu \; 2 \cdot k_B T \cdot \frac{1}{2} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot k_B T$$

o.k. für $h\nu < k_B T$

Aber: $U_{JR} \to \infty$ für $h\nu > k_B T$ $\lightning$

Planck: $U(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$

... einige Tage später ...

$$= \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/k_B T}(1 - e^{-h\nu/k_B T})}$$

$$= \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{e^{-h\nu/k_B T}}{1 - e^{-h\nu/k_B T}}$$

Entwicklung nach geometrischer Reihe

$$= \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 e^{-h\nu/k_B T} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-h\nu/k_B T}\right)^n$$

$$(\ell = n+1) \quad \boxed{U_{\nu,T} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-\ell \cdot \frac{h\nu}{k_B T}}}$$

Einstein: Herleitung unter der Annahme, daß EM-Strahlung nur in Energiequanten

$$\boxed{E = h\nu}$$

emittiert werden kann

$h\nu$ Elementarenergie

$\hat{=}$ Elementarteilchen $=$ Photon

Daraus folgt: Wahrscheinlichkeit n Photonen zu emittieren

$$P_n = \frac{e^{-n\frac{h\nu}{k_B T}}}{\left(Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\frac{h\nu}{k_B T}}\right)}$$

$$U(\nu, T) = n_\nu \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot h\nu \, P_n$$

☺ $$= \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \left(e^{\beta h\nu} - 1\right)^{-1}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

Quantenhypothese erzwingt die neue Formulierung der Physik durch Wahrscheinlichkeitsamplituden ψ

$|\psi|^2 =$ Wahrscheinlichkeitsdichte

$=$ Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik

II. Schrödingergleichung

III. Mathematische Grundlage der QM
(Hilbertraum , Skalarprodukt ;
Erwartungswerte ; Distributionen)

IV Lösung der stationären SG
1. ∞ - Potentialtopf
2. endl. " ⇒ Quantentunneln
a) diskretes Spektrum von gebundenen Zuständen
b) Kontinuum von Streuzuständen
3. Potentialbarriere ⇒ Quantentunneln
4. Harmonischer Oszillator
5. Periodisches Kristallgitter ⇒ Bandstruktur

V. Zeitabhängige Schrödingergleichung
1. Wellenpaket
2. 2-Niveau-System (Blochgleichung)

VI. Heisenberg'sche Formulierung

1. Operatoren
2. Heisenbergbild
3. Zeitentwicklungsoperator
4. Harmonischer Oszillator

Einschub: Feynman's Formulierung der QM

VII. Symmetrien in der QM

1. Symmetrien in der klassischen Physik
2. Noether-Theorem in der QM - Kontinuierliche Symmetrien
3. diskrete Symmetrien : Parität , Zeitumkehr

VIII. Quantenmechanik eines geladenen Teilchens im Magnetfeld
- Heisenberggleichungen im Magnetfeld
- Landau-Bänder
- Aharonov-Bohmeffekt ; normaler Dauerstrom
- Eichtransformation

IX. Drehimpuls
1. Bahndrehimpuls . Beispiel: Geladenes Teilchen im Ring
2. Hamiltonoperator in 3D
3. Rotationsoperator ; Drehimpuls-Kommutatoralgebra
4. Ortsdarstellung
5. Eigenwerte und Eigenfunktionen

X. 3D SG mit Zentralkräften

1. freie SG
2. Zentralsymmetrischer Potentialtopf
3. " Potentialkasten
4. Das Wasserstoffatom

XI. Streutheorie

XII. Spin

1. Kommutatoralgebra, Matrizendarstellung
2. Spinrotation

XIII. Störungstheorie

1. nicht entartet
2 entartet

XIV. Zeitabhängige Störungstheorie

Schein: 60% Übungen
(Ausgabe Do, Abgabe Mi in Übungsgruppen)
Zu zweit
20% Do 7.6. Klausur
("Take Home")
20% Do 5.7. " Präsent

Übungsgruppen

Mi: 10^{30} - 12^{00} Björn Vogt, Marcel Kossow
Mi: 13^{30} - 15^{00} Kelly Pelton
Roman Kogler
Stefan Kett