

3 Elektrostatik

Das in der letzten Vorlesung vorgestellte Helmholtz-Theorem stellt eine formale Lösung der Maxwell-Gleichungen dar. Im Folgenden werden wir alternative Methoden kennenlernen (bzw. wiederholen), die uns einen tieferen Einblick in die Struktur der Lösungen geben. Im ersten Teil der Vorlesung werden wir uns mit statischen Problemen beschäftigen, so dass wir uns zunächst nicht mit dem Problem der Zeitabhängigkeit der Felder befassen müssen.

Die Gesetze der Elektrostatik gelten, wenn

$$\begin{array}{ll} \text{Felder zeitlich konstant sind} & \text{d.h. } \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0 \\ \text{keine Ströme fließen} & \text{d.h. } \underline{j} = 0 \end{array}$$

Dann reduzieren sich die Maxwell Gleichungen zu

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \quad \text{und} \quad \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0.$$

3.1 Elektrostatische Felder symmetrischer Ladungsverteilungen

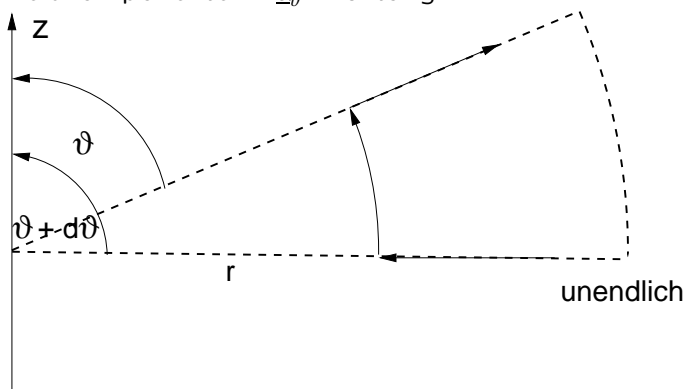
Für symmetrische Ladungsverteilungen ρ kann man das elektrische Feld direkt aus den Maxwell-Gleichungen ableiten.

Beispiel: Feld einer Punktladung

Aus Symmetriegründen hängt das Feld einer Punktladung nur vom Abstand ab:

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{x}) = \underline{E}(r)$$

1. Feldkomponente in \underline{e}_ϑ -Richtung:



Aus $\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$ folgt mit Hilfe des Stokes'schen Theorems:

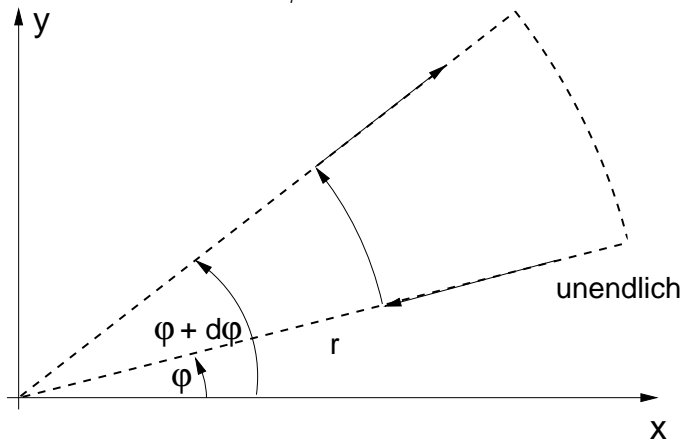
$$\begin{aligned} \oint_{\text{Schleife}} \underline{E} \cdot d\underline{\gamma} &= 0 \\ &= \int_{\vartheta+d\vartheta}^{\vartheta} E_\vartheta(r) r d\vartheta + \int_r^\infty E_r(r') dr' + \int_{\vartheta}^{\vartheta+d\vartheta} E_\vartheta(\infty) r_\infty d\vartheta + \int_\infty^r E_r(r') dr' \end{aligned}$$

Die Beiträge der Wegstücke in r -Richtung heben sich gegenseitig auf.

Das Wegstück im Unendlichen trägt nicht bei, da $E_\vartheta(\infty) \rightarrow 0$ (schneller als $\frac{1}{r^2}$).

$$\Rightarrow E_\vartheta(r) = 0.$$

2. Feldkomponente in \underline{e}_φ -Richtung:



analog zur ϑ -Komponente:

Mit $\nabla \times \underline{E} = 0$

$$0 = \int_{\varphi}^{\varphi+d\varphi} r \sin \vartheta d\varphi E_\varphi(r) + \int_r^\infty E_r(r') dr' + \int_{\varphi+d\varphi}^\varphi r_\infty \sin \vartheta d\varphi E_\varphi(\infty) + \int_\infty^r E_r(r') dr'$$

Auch hier heben sich die Beiträge der Wegstücke in r -Richtung gegenseitig auf und der Weg im Unendlichen liefert keinen Beitrag.

$$\Rightarrow E_\varphi(r) = 0$$

3. Feldkomponente in \underline{e}_r -Richtung:

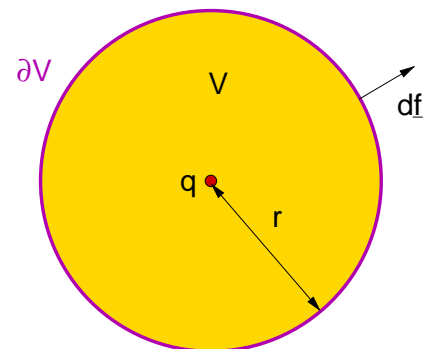
Verwende Gauss'sches Gesetz:

$$\int_V \nabla \cdot \underline{E} dV = \int_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\int_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \oint E_r(r) r^2 d\Omega = 4\pi E_r(r) r^2$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

E_r fällt also im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ ab.



Insgesamt ergibt sich also das bekannte Feld der Punktladung zu

$$\underline{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}.$$

Beispiel 2: Zylindersymmetrie

Betrachten Sie einen unendlich langen, zylindrischen Leiter mit Radius R , dessen Ladung zur Leiteroberfläche gemäß

$$\rho(\underline{x}) = \begin{cases} \rho_0 \exp\left(\frac{r-R}{d}\right) & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (1)$$

Auch hier benutzt man das Faraday'sche Gesetz ($\nabla \times \underline{E} = 0$), um zu zeigen, dass

$$E_\varphi = 0 = E_z.$$

Die Radialkomponente ermittelt man mit Hilfe des Gauss'schen Gesetzes:

1. $0 \leq r \leq R$:

Wähle konzentrischen Zylinder im Innern des Leiters als Gauss'sches Volumen.

$$\int_{\text{Mantelfläche}} E_r(r) df + \int_{\text{Deckel}} E_z(r) df - \int_{\text{Boden}} E_z(r) df$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi r E_r(r) = \int_0^r dr' \int_0^h dz \int_0^{2\pi} r' d\varphi \rho_0 \exp\left(\frac{r'-R}{d}\right)$$

$$\Rightarrow E_r(r) 2\pi r h = 2\pi h \rho_0 d \exp\left(-\frac{R}{d}\right) \left[(r-d) \exp\left(\frac{r}{d}\right) + 1 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{E_r(r) = \frac{1}{r} \rho_0 d \exp\left(-\frac{R}{d}\right) \left[(r-d) \exp\left(\frac{r}{d}\right) + 1 \right]}$$

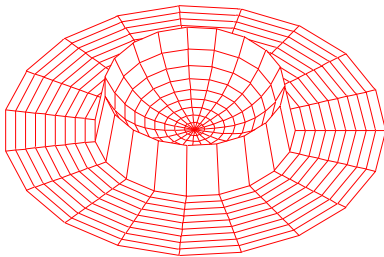
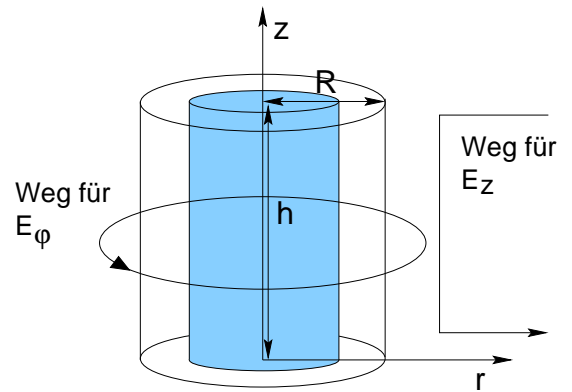
2. $r > R$

Oberflächenintegral wie unter 1.

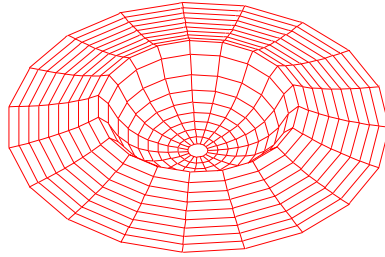
Ladung erstreckt sich nur bis $r = R$

$$\Rightarrow E_r(r) 2\pi r h = 2\pi h \rho_0 d \exp\left(-\frac{R}{d}\right) \left[(R-d) \exp\left(\frac{R}{d}\right) + 1 \right]$$

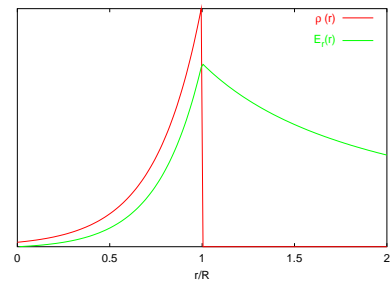
$$\Rightarrow \boxed{E_r(r) = \frac{1}{r} \rho_0 d \exp\left(-\frac{R}{d}\right) \left[(R-d) \exp\left(\frac{R}{d}\right) + 1 \right]}$$



$\rho(r)$



$E_r(r)$



3.2 Elektrostatisches Potential

In Analogie zur mechanischen Arbeit ($\int \underline{F} \cdot \underline{s}$) definiert man das **elektrostatische Potential** an einem Punkt \underline{r} (relativ zum Potential an einem Referenzpunkt \mathcal{O}) durch:

$$\phi(\underline{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{\ell}$$

Ist das eine nützliche Definition?

Ja:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0 &\Rightarrow \int_{\text{any open surface } s} (\underline{\nabla} \times \underline{E}) \cdot d\underline{f} = 0 \\ &\Rightarrow \oint_{\partial S} \underline{E} \cdot d\underline{f} = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Für jeden Weg: $\int_{\mathcal{O}}^{\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{\ell}$ ist unabhängig vom Weg.

(Beweis: Wähle zwei unterschiedliche Wege von \mathcal{O} nach \underline{r} . Man kombiniert sie zu einem geschlossenen Weg, indem man von \underline{r} nach \mathcal{O} via Weg II zurückkehrt. Dann:

$$\int_I \underline{E} \cdot d\underline{\ell} + \int_{II} \underline{E} \cdot d(-\underline{\ell}) = 0, \text{ i.e. } \int_I \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = \int_{II} \underline{E} \cdot d\underline{\ell}.)$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a}) &= \int_{\underline{a}}^{\underline{b}} \underline{\nabla} \phi \cdot d\underline{\ell} \\ &= - \int_{\underline{a}}^{\underline{b}} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} \\ &\Rightarrow \underline{E} = -\underline{\nabla} \phi \end{aligned}$$

Das Potential genügt dem Superpositionsprinzip.

Beachte: Wir haben die Information, die in den drei Vektorkomponenten von \underline{E} in einer einzelnen skalaren Größe zusammengefaßt.

Das entspricht natürlich vollkommen der Aussage des Helmholtz-Theorems: Die Rotationsfreiheit von \underline{E} zieht nach dem Helmholtz-Theorem die Darstellung des elektrischen Feldes als

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} U$$

nach sich.

Rolle des *Referenzpunkts*:

Normalerweise wählt man \mathcal{O} außerhalb der Ladungsverteilung, d.h., im Allgemeinen ist das Unendliche dafür gut geeignet, da man fordert, daß $\phi(\infty) = 0$ (siehe Helmholtz Theorem).

Einheit des elektrostatischen Potentials: $[\phi] = \text{V} = \text{J/C}$.

3.2.1 Laplace- und Poisson-Gleichung

Aus der Kombination von Gauss'schem Gesetz

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

und aus

$$\underline{E} = -\nabla\phi$$

ergibt sich als Bestimmungsgleichung für das elektrostatische Potential die sog. **Poisson-Gleichung**,

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho.$$

Bei Abwesenheit von Ladungen ($\rho = 0$) geht die Poisson-Gleichung in die **Laplace-Gleichung** über.

3.2.2 Berechnung des Elektrostatischen Potentials

Zur Berechnung des elektrostatischen Potentials stehen uns drei verschiedene Methoden zur Verfügung:

a) $\phi(\underline{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\underline{r}} \underline{E} \cdot d\underline{\gamma}$ bei bekanntem Feld \underline{E} .

b) Lösung der Poisson-Gleichung

c) Auswertung des Helmholtz-Integrals.

Im folgenden werden Beispiele für diese Lösungsmethoden gegeben.

Berechnung des Potentials einer Punktladung bei bekanntem elektrischem Feld

Wir haben gezeigt, daß das Feld einer Punktladung im Koordinatenursprung durch

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underline{e}_r$$

gegeben ist.

Dann ist das Potential dieser Punktladung durch

$$\phi(\underline{r}) - \phi(\mathcal{O}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\underline{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underline{e}_r \cdot d\underline{\gamma}$$

gegeben. Wählt man als Referenzpunkt einen Punkt im Unendlichen, der mit \underline{r} durch einen Weg in r -Richtung verbunden ist, so findet man das Potential der Punktladung als

$$\phi(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Berechnung des Potentials durch direkte Lösung der Poisson-Gleichung

Beispiel: Potential der homogen geladenen Kugel

Aus der Symmetrie der Ladungsverteilung folgt, daß das Potential der homogen geladenen Kugel nur vom Abstand vom Kugelmittelpunkt abhängt.

In Kugelkoordinaten lautet die Poisson-Gleichung:

$$\Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) \phi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r).$$

Diese Differentialgleichung kann für die Bereiche $r < R$ und $r > R$ getrennt integriert werden:

$$\begin{aligned} r > R: \quad (r^2 \phi')' &= 0 & \Rightarrow \phi(r) &= -\frac{C_1}{r} + C_2 \\ r < R: \quad (r^2 \phi')' &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2 & \Rightarrow \phi(r) &= -\frac{1}{6\epsilon_0} \rho_0 r^2 - \frac{C_3}{r} + C_4 \end{aligned}$$

Im Unendlichen soll das Potential verschwinden

$$\Rightarrow C_2 = 0.$$

Der Term $\frac{C_3}{r}$ entspricht dem Potential einer Punktladung am Ort $r = 0$, da

$$\Delta \frac{1}{r} = 4\pi\delta(\underline{r}).$$

Da die Ladungsverteilung keine solche Punktladung enthält, muss

$$C_3 = 0$$

gelten. (Diese spuriöse Lösung entstand durch Multiplikation beider Seiten der Poisson-Gleichung mit r^2 .) Damit ergibt sich

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{C_1}{r} & (r > R) \\ C_4 - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} & (r < R) \end{cases},$$

wobei die Gesamtladung der Kugel $Q = 4\pi/3\rho_0 R^3$ ist.

Die verbleibenden Integrationskonstanten ergeben sich aus der Anschlußbedingung an das Potential bei $r = R$:

Die Ladungsverteilung zeigt bei $r = R$ einen Sprung. Dementsprechend muß auch die rechte Seite der Poisson-Gleichung ein solches Sprungverhalten aufweisen. Wenn $(r^2\phi)'$ einen Sprung hat, dann hat $(r^2\phi)$ einen Knick. Dem entsprechend sind ϕ und ϕ' stetig. Das spiegelt auch die Tatsache wider, dass elektrische Felder an Grenzflächen ohne Oberflächenladung stetig sind.

Aus der Stetigkeitsbedingung folgt:

$$-\frac{C_1}{R} = C_4 - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}, \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{R^2} = -\frac{Q}{R^2}.$$

Damit ergibt sich das Potential der homogen geladenen Kugel zu

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r > R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & (r < R) \end{cases}.$$

Berechnung des Potentials einer homogen geladenen Kugelschale mit Hilfe des Helmholtz-Integrals

Die Ladungsverteilung der homogen geladenen Kugelschale ist

$$\rho(\underline{r}) = \sigma_0\delta(R - r).$$

Nach dem Helmholtz-Theorem ist das elektrostatische Potential dann durch

$$U = \phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma_0}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \delta(R - r') dV'$$

gegeben.

Bei kugelsymmetrischen Problemen kann man die z -Achse so wählen, daß \underline{r}' auf der z -Achse zu liegen kommt. Dann ist

$$|\underline{r} - \underline{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}.$$

Die ϑ -Integration liefert dann

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'x}} = \frac{|r + r'| - |r - r'|}{rr'}.$$

Die φ -Integration liefert nun nur noch einen Faktor 2π und die δ -Distribution legt den Wert von $r' = R$ fest.

Die Fallunterscheidung für $r >< R$ wird aufgrund des Terms $|r - R|$ erforderlich. Somit ergibt sich das Potential zu:

$$\phi(\underline{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 R}{\epsilon_0} & (r < R) \\ \frac{4\pi\sigma_0}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r > R) \end{cases}.$$

Beachte: Das Feld dieser Ladungsverteilung weist bei $r = R$ einen Sprung von $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ auf.

3.3 Elektrostatische Energie

3.3.1 Energie einer Anordnung von Punktladungen

Energie für die Bewegung eines Teilchens im elektrischen Feldes

Kraft auf eine Ladung q in einem elektrostatischen Potential:

$$\underline{F} = q\underline{E}$$

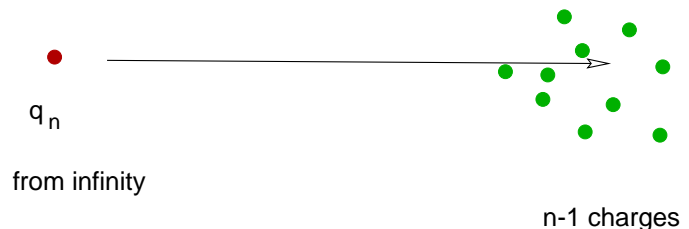
Arbeit, die verrichtet wird, um die Ladung von \underline{a} nach \underline{b} zu bringen:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\underline{a}}^{\underline{b}} (-\underline{E}) \cdot d\underline{\ell} = -q \int_{\underline{a}}^{\underline{b}} (\underline{E}) \cdot d\underline{\ell} \\ &= q(\phi(\underline{b}) - \phi(\underline{a})) \end{aligned}$$

Arbeit, die Ladung aus dem Unendlichen an den Ort \underline{r} zu bringen:

$$W = q\phi(\underline{r})$$

Energie, die in einer Anordnung von Ladungen gespeichert ist



Arbeit, die verrichtet werden muß um die n -te Ladung q_n aus dem Unendlichen an ihre endgültige Position zu bringen:

$$W_n = q_n\phi(\underline{r}_n)$$

Potential, das von den $n - 1$ bereits vorhandenen Ladungen am Ort \underline{r}_n erzeugt wird:

$$\phi(\underline{r}_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^{n-1} \frac{q_i}{|\underline{r}_n - \underline{r}_i|}$$

Energie, die in dem Ensemble von n Ladungen gespeichert ist:

$$\begin{aligned} W &= \sum_j^n W_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{q_i}{|\underline{r}_j - \underline{r}_i|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \end{aligned}$$

3.3.2 Energie, die in einer kontinuierlichen Ladungsverteilung gespeichert ist

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \int dV' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

Beachte: Hier kann man den Beitrag, der von einer Ladung in ihrem eigenen Potential stammt, $\underline{r} = \underline{r}'$, nicht ausschließen. Man nennt diesen Beitrag auch **Selbstenergie**. Der Beitrag der

Selbstenergie zur Gesamtenergie ist vernachlässigbar klein, wenn die Ladungsverteilung hinreichend verdünnt ist.

Mit

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

kann die elektrostatische Energie auch als

$$W = \frac{1}{2} \int dV \rho(\underline{r})\phi(\underline{r})$$

geschrieben werden.

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \underline{E} \Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \cdot \underline{E})\phi$$

$$\nabla \cdot (\underline{E}\phi) = (\nabla \cdot \underline{E})\phi + \underline{E} \cdot (\nabla\phi) \text{ und } \nabla\phi = \underline{E}$$

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV [\nabla \cdot (\underline{E}\phi) + E^2]$$

Benutze Gauss'sches Theorem:

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_{\partial V} \phi \underline{E} \cdot d\underline{f} + \int dV E^2 \right]$$

Wenn sich im Unendlichen keine Ladungen befinden, kann man das Integrationsvolumen ins Unendliche ausdehnen. Dann gilt:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2.$$

Mit einem elektrischen Feld ist also stets eine Energiedichte

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

verknüpft. Diese Energiedichte ist *nicht* linear in den Feldern. Daher ist die Energiedichte zweier sich überlagernder Felder *nicht* allein durch die Summe der individuellen Energiedichten gegeben.

Homogen geladene Kugel

Das Feld der homogen geladenen Kugel ist radialsymmetrisch mit

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} & (r < R) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}.$$

Daraus ergibt sich eine Feldenergiedichte von

$$u(r) = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \begin{cases} \frac{r^2}{R^3} & (r < R) \\ \frac{1}{r^4} & (r > R) \end{cases}.$$

Damit beinhaltet die Ladungsanordnung einer homogen geladenen Kugel eine Gesamtenergie von

$$U = \int u(r)dV = \frac{3}{5\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}.$$

Läßt man die Kugel bei gleichbleibender Gesamtladung zu einer Punktladung schrumpfen, so erkennt man, daß die Selbstenergie einer Punktladung unendlich anwächst.

Klassischer Elektronenradius

Setzt man die elektrostatische Energie eines Elektrons mit seiner Ruhemasse gleich,

$$U = m_e c^2 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{\epsilon_0 R_e},$$

so ergibt sich der *klassische Elektronenradius* zu

$$R_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e c^2} \simeq 1.7 \times 10^{-13} \text{cm}.$$