3 Vorlesung: Lagrange Mechanik I

3.1 Zwangsbedingungen

Im folgenden Kapitel werden wir uns mit Bewegungen beschäftigen, die *geometrischen Zwangsbedingungen* unterliegen, wie etwa der Pendelbewegung, der Bewegung auf der Achterbahn und vieler anderer. Für diese Bewegungen ist es oft sehr schwierig die Newton'schen Bewegungsgleichungen zu formulieren, da neben den offensichtlichen Kräften, wie etwa der Gravitation oder der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Massen, auch diejenigen Kräfte berücksichtigt werden müßten, die die Bewegungsfreiheit des betrachteten Objekts einschränken. Diese sogenannten **Zwangskräfte** sind in der Regel vom Bewegungszustand des Objekts abhängig.

Betrachten wir dazu ein Beispiel: Eine starre Kugel rollt auf einer gekrümmten Oberfläche. Die Kugel besteht aus vielen Teilchen, deren Bewegung so aufeinander abgestimmt ist, dass die Kugel stets ihre Form behält. Eins dieser Teilchen ist stets in Kontakt mit der Oberfläche und instantan in Ruhe, wenn die Kugel rollt. Bei dieser Bewegung sind eine Vielzahl Kräfte am Werk: innere Kräfte, die die Kugel "in Form" halten, Kräfte, die die Kugel auf der Oberfläche halten und verhindern, dass die Kugel gleitet, und die Gravitation. Von all diesen Kräften ist nur die Gravitationskraft von vornherein bekannt. Vom Standpunkt der Newton'schen Bewegungsgleichungen aus, müssten wir all diese Kräfte zunächst bestimmen, bevor wir die Bewegung der Kugel berechnen können. In den folgenden Kapiteln werden wir sehen dass die Lagrange'sche Formulierung der Mechanik es einerseits erlaubt, die Zwangskräfte zu bestimmen, dies andererseits sogar völlig überflüssig macht.

Zunächst wollen wir die Zwangsbedinungen, denen eine Bewegung – von N Massepunkten – unterworfen sein kann, klassifizieren. Zwangsbedingungen treten häufig in Form *impliziter Gleichungen* auf, etwa

$$f_I(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N, t) = 0 \text{ für } I = 1, \ldots, K < 3N,$$

wobei $\underline{x}_i$ wie gewöhnlich die Ortsvektoren der Teilchen bezeichnen.

Wir setzen voraus, dass die f_I differenzierbare Funktionen ihrer Variablen sind, und dass die Abhängigkeit von t beschreibt, wie sich die Zwangsbedingungen im Laufe der Zeit ändern, unabhängig davon, wie sich die Teilchen bewegen. Zwangsbedingungen, die nur von den Teilchenkoordinaten und der Zeit abhängen heissen **holonom** (=integrabel). K voneinander unabhängige holonome Zwangsbedingungen reduzieren die $3N$ Freiheitsgrade eines N-Teilchensystems auf $3N - K$.

Im allgemeinsten Fall können die Zwangsbedingungen auch von den Geschwindigkeiten der Teilchen abhängen. In diesem Fall sind sie (meist) nicht holonom. Auch Zwangsbedingungen, die sich in Form von Ungleichungen darstellen – wie etwa die Einschränkung der Bewegung auf einen begrenzten Raumbereich – sind nicht holonom.

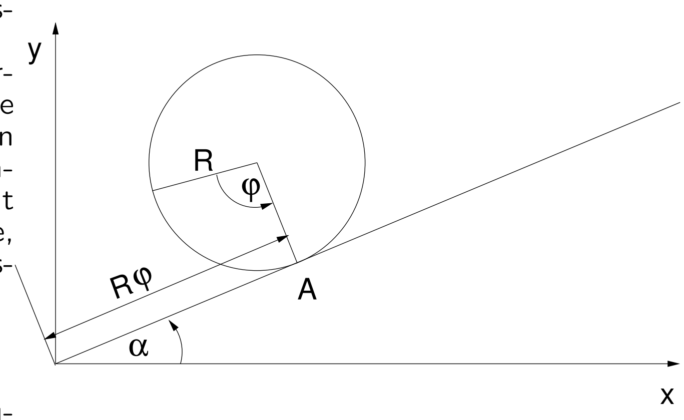
Zeitabhängige Zwangsbedingungen heissen **rheonom**. Zwangsbedingungen, die nicht explizit von der Zeit abhängen werden **skleronom** genannt.

Beispiele (nach Kuypers)

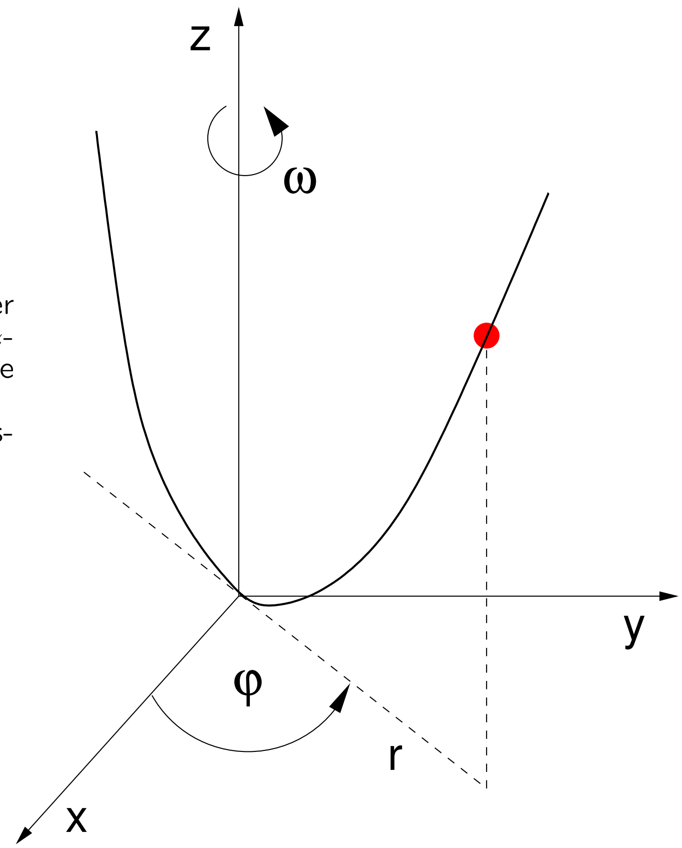
1. Eine Scheibe mit Radius R rollt ohne Schlupf auf einer geneigten Geraden. Wie lauten die Zwangsbedingungen?
   Ohne Zwangsbedingungen würde man drei Koordinaten benötigen, um die Lage der freien Scheibe in der x,y-Ebene zu kennzeichnen: Die beiden Mittelpunktskoordinaten x und y und den Orientierungswinkel φ. In dem vorliegenden Fall hat man jedoch nur *eine* unabhängige Koordinate, etwa den Winkel φ. Daher existieren zwei Zwangsbedingungen:

   $$x_A - R\varphi\cos\alpha = 0 \qquad y_A - R\varphi\sin\alpha = 0,$$

   wobei x_A und y_A die Koordinaten des Auflagepunktes A sind.



2. Auf einem parabelförmig gebogenen Draht, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse dreht, sitzt eine Perle. Wie lauten die Zwangsbedingungen?
   In Zylinderkoordinaten lauten die beiden Zwangsbedingungen:
   $$\varphi - \omega t = 0$$
   $$z - ar^2 = 0$$



3.2 Zwangskräfte und Arbeit

Wie man mit Zwangsbedingungen umgeht, kann anhand des Beispiels eines Punktteilchens demonstriert werden, dessen Bewegung auf eine zweidimensionale Oberfläche

$$f(\underline{x}, t) =$$

eingeschränkt ist. (Also $N = 1$, $K = 1$.)

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen für dieses Teilchen lauten

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{F} + \underline{C},$$

wobei $\underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ die bekannte, äußere Kraft bezeichnet und $\underline{C}$ die unbekannte Zwangskraft, die die Oberfläche auf das Teilchen auswirkt.

Damit haben wir 4 Gleichungen für die 6 unbekannten Funktionen der Zeit, $\underline{x}(t)$ und $\underline{C(t)}$. Die Unterbestimmtheit dieses Problems resultiert daraus, dass die Bedingung, dass die Zwangskraft das Teilchen auf der Fläche halten soll, nicht ausreicht, um die Richtung der Zwangskraft festzulegen. Jede zusätzliche Kraft, die parallel zur Zwangsfläche wirkt, führt zu einer Bewegung, die mit der Zwangsbedingung vereinbar ist.

Fordern wir jedoch, dass die Zwangskraft die Bewegung des Teilchens parallel zur Zwangsebene *nicht beeinflussen* soll, so legt dies die **Richtung der Zwangskraft senkrecht zur Zwangsfläche** fest.

Ist die Zwangsbedingung durch $f(\underline{x}, t) = \text{const}$ gegeben, so ist

$$\underline{\nabla} f(\underline{x}, t) \perp \text{ Oberfläche}$$

an jedem Punkt der Zwangsfläche. (Streng genommen muss noch gefordert werden, dass $\underline{\nabla} f \not\equiv 0$ auf der Oberfläche.)

Man kann für die Zwangskraft also den Ansatz

$$\underline{C} = \lambda \underline{\nabla} f(\underline{x}, t)$$

machen, d.h. zur Bestimmung der Zwangskraft ist nur die Bestimmung der unbekannten λ erforderlich. Es stehen nun also den 4 Bestimmungsgleichungen nur noch 4 unbekannte Größen gegenüber.

Wir wollen nun untersuchen, welche Auswirkung Zwangskräfte auf die Energiebilanz des Systems haben. Der Einfachheit halber nehmen wir dazu an, dass die *externen Kräfte* ein Potential besitzen. Die Vorgehensweise ist analog zur Herleitung des Energiesatzes. Wir multiplizieren die Bewegungsgleichung mit der Geschwindigkeit:

$$m\ddot{\underline{x}} \cdot \dot{\underline{x}} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -(\underline{\nabla} V) \cdot \dot{\underline{x}} + \lambda(\underline{\nabla} f) \cdot \dot{\underline{x}}.$$

Ist $\underline{x}(t)$ bereits die Lösung der Bewegungsgleichung, dann erfüllt sie die Zwangsbedingung

$$f(\underline{x}(t), t) = 0 \to 0 = \frac{df}{dt} = (\underline{\nabla} f) \cdot \dot{\underline{x}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Analog gilt

$$\frac{dV}{dt} = (\underline{\nabla} V) \cdot \dot{\underline{x}} + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen erhält man durch Einsetzen in obige Gleichung

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V\right] = \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Die Energie des Teilchens ändert sich also nur dann, wenn V oder f explizit zeitabhängig sind. Lassen wir zunächst einmal zeitabhängige Potentiale außer Acht und beschäftigen wir uns mit den Zwangsbedingungen.

Wenn die Zwangsbedingungen zeitunabhängig sind, dann stehen Zwangskraft und Geschwindigkeit stets senkrecht aufeinander, also

$$(\underline{\nabla} V) \cdot \dot{\underline{x}} = 0 \qquad \text{(bei zeitunabhängigen Zwangsbedingungen).}$$

Stationäre Zwangsbedingungen verrichten also keine Arbeit am System.

Ist die Zwangsbedingung jedoch explizit zeitabhängig, bewegt sich also die Oberfläche auf der sich das Teilchen befindet, so bekommt die Geschwindigkeit des Teilchens eine Komponente, die instantan senkrecht zur Zwangsfläche ist. In diesem Fall ist

$$(\underline{\nabla} V) \cdot \dot{\underline{x}} \neq 0 \qquad \text{(bei zeitabhängigen Zwangsbedingungen).}$$

Zeitlich veränderliche Zwangsbedinungen verrichten also Arbeit.

Wie steht es nun mit *Impuls- und Drehimpulssatz*? Hier sind die Zwangskräfte explizit zu berücksichtigen:

Impulssatz:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\underline{x}}) = \underline{F} + \underline{C}.$$

Selbst wenn die externen Kräfte verschwinden, ist der Impuls nicht notwendigerweise erhalten. Andererseits kann die Zwangskraft gerade eine äußere Kraft kompensieren und damit die Impulserhaltung erst etablieren. Dies ist der Fall bei der Bewegung auf der ebenen Tischplatte, bei der die Zwangskraft die Gravitation kompensiert.

Drehimpulssatz:

$$\frac{d}{dt}\underline{L} = \frac{d}{dt}(m\underline{x} \times \dot{\underline{x}}) = \underline{x} \times (\underline{F} + \underline{C}).$$

Verallgemeinerungen

Wir haben uns bisher auf ein Punktteilchen und eine Zwangsbedingung beschränkt. Die Verallgemeinerung auf mehrerer Teilchen und Zwangsbedingungen erfolgt analog:

Zu $K < 3N$ holonomen Zwangsbedingungen

$$f_I(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N, t) = 0$$

konstruiert man Zwangskräfte gemäß der Vorschrift

$$\underline{C}_{I,i} = \lambda_I \underline{\nabla}_i f_I.$$

$\underline{C}_{I,i}$ bezeichnet hierbei die Zwangskraft, welche auf Grund der Zwangsbedingung I auf das Teilchen i ausgeübt wird.

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung für das i-te Teilchen zu

$$m\ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i + \underline{C}_i,$$

wobei – wie bisher – $\underline{F}_i$ die Summe aller äußeren Kräfte auf Teilchen i bezeichnet und

$$\underline{C}_i = \sum_I \underline{C}_{I,i} \qquad \text{die Summe aller Zwangskräfte auf Teilchen } i.$$

Zusammen mit den Zwangsbedingungen sind dies die **Lagrange-Gleichungen 1. Art**.

Lagrange-Gleichungen 1. Art:

$$m\ddot{\underline{x}}_i = \underline{F}_i + \sum_{I=1}^{K} \lambda_I \underline{\nabla}_i f_I \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

$$f_I(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N, t) = 0 \qquad (I = 1, \ldots, K)$$

Beispiel:

Zwei kräftefreie Teilchen werden durch eine masselose Stange der Länge ℓ auf stets gleichem Abstand gehalten. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf!

Die Zwangsbedingung lautet

$$f_1(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = f_1(|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|) = |\underline{x}_1 - \underline{x}_2| - \ell = 0.$$

Die Zwangskräfte ergeben sich dann zu

$$\underline{C}_1 = \lambda_1 \underline{\nabla}_1 f_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \underline{r}_1}[\sqrt{(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)^2} - \ell] = \lambda_1 \frac{\underline{x}_1 - \underline{x}_2}{|\underline{x}_1 - \underline{x}_2|} = \lambda_1 \underline{e}_{12},$$

der Kraft auf Teilchen 1 und

$$\underline{C}_2 = \lambda_1 \underline{\nabla}_2 f_1 = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \underline{r}_2}[\sqrt{(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)^2} - \ell] = -\lambda_1 \underline{e}_{12} = -\underline{C}_1.$$

$$\begin{aligned} \to m\ddot{\underline{x}}_1 &= \lambda_1 \underline{e}_{12} \\ \to m\ddot{\underline{x}}_2 &= -\lambda_1 \underline{e}_{12} \end{aligned}$$

3.3 Lösung der Lagrange-Gleichungen 1. Art

Die Lösung der Lagrange-Gleichungen erfolgt in zwei Schritten. Zunächst müssen die unbekannten Parameter λ_I eliminiert werden. Anschließend sind die verbleibenden Bewegungsgleichungen zu lösen. Zum Schluss können dann die Zwangskräfte explizit bestimmt werden.

Wie eliminiert man nun die λ_I?

Indem man die zweifache totale Zeitableitung der Zwangsbedingungen bildet, erhält man einen Ausdruck, der die Bahnbeschleunigungen enthält:

$$\frac{d^2 f_I}{dt^2} = 0 = \frac{d}{dt}\left[\left\{\sum_i (\underline{\nabla}_i f_I) \cdot \dot{\underline{x}}_i\right\} + \frac{\partial f_I}{\partial t}\right] = \sum_i \left\{(\underline{\nabla}_i f_I) \cdot \ddot{\underline{x}}_i + (\frac{\partial}{\partial t}\underline{\nabla}_i f_I) \cdot \dot{\underline{x}}_i + \underline{\nabla}_i \frac{\partial f_I}{\partial t} \cdot \dot{\underline{x}}_i\right\} + \frac{\partial^2 f_I}{\partial t^2}$$

Separiert man die Bahnbeschleunigungen,

$$\sum_i (\underline{\nabla}_i f_I) \cdot \underline{\ddot{x}}_i = -2 \sum_i \left\{ \underline{\nabla}_i \frac{\partial f_I}{\partial t} \cdot \underline{\dot{x}}_i \right\} - \frac{\partial^2 f_I}{\partial t^2} \equiv K_I(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{\dot{x}}_1, \dots, \underline{\dot{x}}_N, t),$$

und ersetzt anschließend die $\underline{\ddot{x}}_i$ aus den Bewegungsgleichungen, so erhält man Bestimmungsgleichungen für die λ_I, die keine Bahnbeschleunigungen mehr enthalten:

$$\sum_i (\underline{\nabla}_i f_I) \frac{1}{m_i} \sum \left(F_i + \sum_I \lambda_I \underline{\nabla}_i f_I \right) = K_I.$$

Der Übersichtlichkeit halber wurden in obigem Ausdruck die Argumente weggelassen. Es sei aber darauf hingewiesen, dass dies lineare, inhomogene Gleichungssystem nur noch von Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten abhängt. Man erhält seine Lösung also in der Form

$$\lambda_I = \lambda_I(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{\dot{x}}_1, \dots, \underline{\dot{x}}_N, t) \qquad\qquad (I = 1, \dots, K).$$

Diese Lösung legt nun die Zwangskräfte $\underline{C}_i$ fest:

$$\underline{C}_i = \sum_I \lambda_I \underline{\nabla}_i f_I.$$

Die Zwangskräfte werden dabei in der Regel nicht nur vom Ort, sondern auch von der Geschwindigkeit des Teilchens abhängen.

Im nächsten Schritt kann man nun die Bewegungsgleichungen lösen, wobei – wie gewohnt – die Anfangsbedingungen Berücksichtigung berücksichtigung finden.

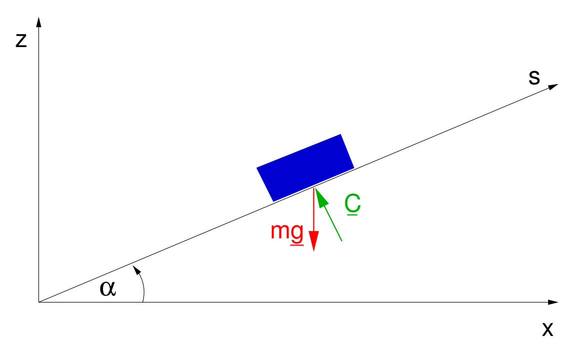
Zuletzt können dann die Zwangskräfte explizit ermittelt werden, indem man $\underline{x}_i(t)$ und $\underline{\dot{x}}_i(t)$ in den Ausdruck für die Zwangskraft $\underline{C}_i = \underline{C}_i((\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_N, \underline{\dot{x}}_1, \dots, \underline{\dot{x}}_N, t)$ einsetzt.

3.3.1 Beispiele

(nach Fließbach)

Ein Körper gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene in der xz Ebene.

a) *Formulierung der Zwangsbedingungen*



$$f_1(\underline{r}, t) = x \sin\alpha - z \cos\alpha = 0, \qquad\qquad f_2(\underline{r}, t) = y = 0$$

b) *Lagrange-Gleichungen 1. Art*

$$m\underline{\ddot{r}} = -mg\underline{e}_z + \lambda_1 \underline{\nabla} f_1 + \lambda_2 \underline{\nabla} f_2$$

In Komponenten:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin\alpha$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2$$

$$m\ddot{z} = -\lambda_1 \cos\alpha - mg$$

c) *Elimination von λ_1 und λ_2*

Zweimaliges Differenzieren der Zwangsbedingungen liefert:

$$\ddot{x} \sin\alpha - \ddot{z} \cos\alpha = 0$$

und

$$\ddot{y} = 0$$

Einsetzen der Beschleunigungen aus den Bewegungsgleichungen:

$$\lambda_1 \sin^2\alpha + \lambda_1 \cos^2\alpha + mg \cos\alpha = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = -mg\cos\alpha \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 0.$$

In diesem Fall sind λ_1 und λ_2 also Konstanten.

d) *Einsetzen in die Bewegungsgleichungen*

$$m\ddot{x} = -mg\cos\alpha\sin\alpha$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = mg\cos^2\alpha - mg = -mg\sin^2\alpha$$

e) *Lösung der Bewegungsgleichung*

Die allgemeine Lösung der obigen Bewegungsgleichungen lautet:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha + a_1t + a_2$$
$$y(t) = b_1t + b_2$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha + c_1t + c_2$$

Anpassung an die Anfangsbedingungen

Die Integrationskonstanten sind so zu bestimmen, dass sowohl die Anfangsbedingungen als auch die Zwangsbedingungen erfüllt sind.

Zunächst die Zwangsbedingungen:

$$f_1 \Rightarrow (a_1\sin\alpha - c_1\cos\alpha)t + (a_2\sin\alpha - c_2\cos\alpha) = 0$$

und

$$b_1t + b_2 = 0$$

Diese Bedingungen müssen für beliebige Zeiten t erfüllt sein.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & a_1\sin\alpha - c_1\cos\alpha = 0, \quad b_1 = 0 \\ & a_2\sin\alpha - c_2\cos\alpha = 0, \quad b_2 = 0 \end{aligned}$$

Wähle

$$\begin{aligned} a_1 &= v_0\cos\alpha \qquad & c_1 &= v_0\sin\alpha \\ a_2 &= s_0\cos\alpha \qquad & c_1 &= s_0\sin\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

Dann lautet die allgemeine Lösung der Lagrange-Gleichungen 1. Art

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = s(t)\cos\alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = s(t)\sin\alpha \end{array}\right\} \text{mit} s(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0t + s_0.$$

Die verbliebenen Integrationskonstanten v_0 und s_0 können durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden.

f) *Bestimmung der Zwangskraft*

In den Ausdruck für die Zwangskraft

$$\underline{C} = \lambda_1\underline{\nabla}f_1 + \lambda_2\underline{\nabla}f_2$$

werden die Lösungen für $\lambda_{1,2}$ eingesetzt:

$$\Rightarrow \underline{C} = -mg\sin\alpha\cos\alpha\underline{e}_x + mg\cos^2\alpha\underline{e}_z.$$

Daraus erhält man für den Betrag der Zwangskraft

$$|\underline{C}| = mg\cos\alpha.$$

Diese Zwangskraft kompensiert die zur schiefen Ebene senkrechte Komponente der Schwerkraft.

g) *Diskussion der Lösung*

Das Teilchen bewegt sich längs der in der Abbildung eingezeichneten s-Achse mit

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0t + s_0.$$

Dies entspricht der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{s}(t) = -mg\sin\alpha,$$

die man sich entstanden denken kann durch Zerlegung der am Körper angreifenden Gewichtskraft in eine Komponente senkrecht zur schiefen Ebene ($mg\cos\alpha$) und eine Komponente parallel zu ihr ($mg\sin\alpha$). Die senkrechte Komponente wird durch die Zwangskraft $\lambda_1\underline{\nabla}f_1$ gerade kompensiert. Die parallele Komponente führt zur o.a. Bewegung.

Die Kraft $\underline{F} = m\underline{g}$ ist konservativ. Sie ergibt sich aus dem Potential $U = mgz$. Außerdem sich die Zwangsbedingungen zeitunabhängig. Daher gilt Energieerhaltung:

$$T + U = \frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + mgz = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + mgs\sin\alpha = \text{const.}$$