

22 Strahlung

Wir haben in den letzten Kapiteln gesehen, dass elektromagnetische Wellen Energie mit sich führen. Dieser irreversible Energiefluß *weg von der Quelle* ist kennzeichnend für das Phänomen Strahlung. Als wir die Ausbreitung von Wellen im Vakuum behandelt haben, haben wir die **Quelle der Strahlung** von unseren Betrachtungen ausgeschlossen. Die klassischen Quellen elektromagnetischer Strahlung sind jedoch beschleunigte Ladungen.

Als Strahlungsquelle betrachten wir im Folgenden eine harmonisch oszillierende Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}.$$

Sie erzeugt ein Vektorpotential, das in Lorentz-Eichung durch

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{R}{c})}{R}$$

gegeben ist. Die Stromdichte zur retardierten Zeit $t - \frac{R}{c}$ lässt sich leicht angeben:

$$\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) = \vec{j}(\vec{r}') \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \right] = \vec{j}(\vec{r}') e^{-i\omega t} \exp(ik|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

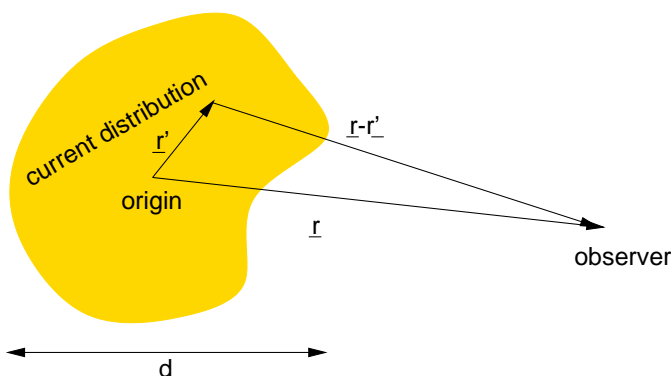
wobei $k = \omega/c$. Damit ergibt sich das Vektorpotential zu

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int dV' \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}').$$

Das elektromagnetische Feld *außerhalb* der Ladungsverteilung kann aus dem Vektorpotential gemäß

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

abgeleitet werden.



Im Folgenden werden wir uns auf die langwelligigen Komponenten der Felder konzentrieren, d.h.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg d \Leftrightarrow c \gg \frac{d}{T},$$

wobei d die Ausdehnung der Stromverteilung ist und $T = \frac{\omega}{2\pi}$ ist die charakteristische Zeitskala, auf der sich die Ladungsverteilung ändert.

In diesem Grenzfall ist garantiert, dass die Energie mit größerer Geschwindigkeit von der Quelle fort transportiert wird als dies der typischen Geschwindigkeit der Quelle (Geschwindigkeit der oszillierenden Ladungen) entspricht, $c \gg \omega d$.

In diesem Fall findet eine weitere Unterscheidung in zwei unterschiedliche Raumbereiche statt:

Nahfeld: $d \ll r \ll \lambda$ Beobachter befindet sich innerhalb einer Wellenlänge von der Ladungsverteilung

Strahlungsfeld: $d \ll \lambda \ll r$ Beobachter ist viele Wellenlängen von der Ladungsverteilung entfernt

In beiden Fällen befindet sich der Beobachter "in weiter Ferne" von der Stromverteilung, $r \gg d$, was die folgende Näherung zulässt,

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{r^2 - 2\vec{r}' \cdot \vec{r} + r'^2} \\ &\simeq r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^2}} \simeq r - \vec{n} \cdot \vec{r}', \end{aligned}$$

wobei $\vec{n} = \vec{e}_r$.

Dann kann man das Vektorpotential in der Form

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

schreiben, wobei (unter Berücksichtigung obiger Näherung)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dV' \frac{e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'}}{1 - \frac{1}{r}(\vec{n} \cdot \vec{r}')} \vec{j}(\vec{r}').$$

Eine Entwicklung des Bruches im obigen Integranden nach den *kleinen Parametern* r'/r und r'/λ ergibt

$$\frac{e^{-ik\vec{n} \cdot \vec{r}'}}{1 - \frac{1}{r}(\vec{n} \cdot \vec{r}')} \simeq 1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right) (\vec{n} \cdot \vec{r}') + \dots$$

22.1 Hertz'scher Dipol

In der **Dipol-Näherung** wird nur die niedrigste Ordnung in obiger Entwicklung berücksichtigt, d.h. die "1". In dieser Näherung werden alle Retardierungseffekte vernachlässigt. Anschaulich bedeutet dies, dass die Ausdehnung der Ladungsverteilung "gegen Null geht". Dies entspricht der Idealisierung, die wir früher schon einmal gemacht haben, als wir über reale und mathematische Dipole gesprochen haben. Durch die Näherung wird die innerhalb von d oszillierende Stromverteilung durch einen idealen Dipol angenähert, wie wir sofort sehen werden.

Im Grenzfall $r \gg d$ gilt

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dV' \vec{j}(\vec{r}').$$

Durch partielle Integration ($\vec{\nabla} \cdot (x_i \vec{j}) = x_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + (\vec{\nabla} x_i) \cdot \vec{j} = x_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \vec{e}_i \cdot \vec{j} \Leftrightarrow j_i = \vec{\nabla} \cdot (x_i \vec{j}) - x_i \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$) erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dV' r' \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}')$$

wobei die Oberflächenbeiträge verschwinden, wenn das Integrationsvolumen die gesamte Stromverteilung umfasst.

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung können wir den Ausdruck für das Vektorpotential so umformen, dass als Quelle eine oszillierende Ladungsverteilung auftritt. Aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t)$$

und

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

schließen wir

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

wobei

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) - i\omega\rho(\vec{r}) = 0.$$

Dem entsprechend schreibt sich der räumliche Anteil des Vektorpotentials einer oszillierenden Ladungsverteilung als

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= -i\frac{\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \\ &= -i\frac{k}{4\pi c\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{p},\end{aligned}$$

wobei wir das elektrische Dipolmoment $\vec{p} = \int dV \vec{r} \rho(\vec{r})$ der Ladungsverteilung eingeführt haben.

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) = -i\frac{k}{4\pi c\epsilon_0} \vec{p} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}.$$

Nun können wir das zum **Hertz'schen Dipol** gehörige Magnetfeld berechnen:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= i\frac{k}{4\pi c\epsilon_0} \vec{p} \times \vec{\nabla} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \\ &= i\frac{k}{4\pi c\epsilon_0} (\vec{p} \times \vec{e}_r) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}.\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{i(kr-\omega t)}$$

finden wir

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c4\pi\epsilon_0} k^2 (\vec{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right).$$

Das elektrische Feld außerhalb der Ladungsverteilung erhalten wir dann aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}.$$

Der räumliche Anteil ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{ic}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \left[(\vec{p} \times \vec{e}_r) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 (\vec{e}_r \times \vec{p}) \times \vec{e}_r \frac{e^{ikr}}{r} + [3\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr}.\end{aligned}$$

Damit gilt zwar immer noch, dass $\vec{B} \perp \vec{e}_r$, aber das elektrische Feld \vec{E} hat eine Komponente in \vec{e}_r -Richtung, d.h. **in Richtung der Ausbreitung**.

Im Nahbereich (Nahfeld) ($kr \ll 1$):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c 4\pi\epsilon_0} ik(\vec{e}_r \times \vec{p}) \frac{1}{r^2}$$

Im Nahbereich gibt es praktisch nur ein elektrisches Dipolfeld. Das Magnetfeld ist um einen Faktor $\vec{k} \cdot \vec{r}/c$ kleiner als das elektrische Feld und ist daher vernachlässigbar. Der imaginäre Faktor in der Amplitude $\vec{B}(\vec{r})$ deutet auf eine Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld hin.

Beachte die charakteristische Abstandsabhängigkeit des elektrischen Dipolfeldes! Im Nahbereich folgt das elektrische Feld in seiner zeitlichen Entwicklung phasengleich und quasistatisch dem oszillierenden Dipolmoment.

Im Fernbereich **Strahlungsfeld** ($kr \gg 1$)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c 4\pi\epsilon_0} k^2 (\vec{e}_r \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = c \vec{B}(\vec{r}) \times \vec{e}_r,$$

d.h. in der Strahlungszone sind die vom Hertz'schen Dipol emittierten Wellen transversal. Wenn das elektrische Dipolmoment in z -Richtung zeigt, so ist das Magnetfeld in \vec{e}_φ und das elektrische Feld in \vec{e}_θ -Richtung ausgerichtet.

In der Strahlungszone sind elektrisches und Magnetfeld in Phase, so wie wir es bereits von der ebenen Welle kennen. Beachte auch die charakteristische Abstandsabhängigkeit der Felder: sowohl elektrisches als auch Magnetfeld nehmen mit $1/r$ ab. Die charakteristische Abstandsabhängigkeit des statischen elektrischen Dipols ist verschwunden. Im Strahlungsfeld generieren sich elektrisches und magnetisches Wechselfeld gegenseitig. Sie haben das "Gedächtnis an ihre Quelle verloren" und breiten sich unabhängig von ihr aus.

Elektrisches und Magnetfeld haben in der Strahlungszone eine charakteristische Winkelverteilung. Beide besitzen keine Feldkomponente in Richtung des oszillierenden Dipols.

Poynting-Vektor

Das zeitliche Mittel des Poynting-Vektors

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{2} \Re(\vec{E} \times \vec{B}^*)$$

gibt den Energieanteil wieder, der im Mittel pro Zeit- und Volumeneinheit in Richtung des Poynting-Vektors transportiert wird ($T = 2\pi/\omega$).

In der Strahlungszone gilt

$$\begin{aligned} \vec{E} &= c\vec{B} \times \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} (\vec{e}_r \times \vec{p}) \times \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [\vec{p} - \vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)] \\ \Rightarrow \vec{E} \times \vec{B}^* &= \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 c} \frac{k^4}{r^2} \vec{e}_r [(\vec{p} \cdot \vec{p}^*) - (\vec{e}_r \cdot \vec{p})(\vec{e}_r \cdot \vec{p}^*)] \end{aligned}$$

Falls \vec{p} in z -Richtung zeigt, so gilt dies auch für \vec{p}^* .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{e}_r \cdot \vec{p} &= p \cos \vartheta \\ \Rightarrow \vec{E} \times \vec{B}^* &= \frac{1}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 c} \frac{k^4}{r^2} \vec{e}_r |\vec{p}|^2 (1 - \cos^2 \vartheta) \end{aligned}$$

Die Leistung, die in den Raumwinkel abgestrahlt wird, beträgt daher

$$\frac{dP(\Omega)}{d\Omega} = r^2 \langle \vec{S} \cdot \vec{e}_r \rangle_T = \frac{1}{2(4\pi)^2 \epsilon_0^2 \mu_0 c} k^4 |p|^2 \sin^2 \vartheta.$$

Beachte, dass die abgestrahlte Leistung mit zunehmendem Abstand von der Quelle **nicht abnimmt!** Das geschickte Zusammenspiel der zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Felder lässt die Felder immer weiter fortschreiten.

Die Winkelverteilung des Strahlungsfeldes ist Torus-förmig. Es gibt keine Strahlung in Richtung des elektrischen Dipols.

Die in alle Richtungen abgestrahlte Leistung ist

$$\begin{aligned} -\frac{dW_{feld}}{dt} &= P = \int d\Omega \frac{dP(\Omega)}{d\Omega} \\ &= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{2\mu_0(4\pi)^2 \epsilon_0^2 c} k^4 |p|^2 \\ &= \frac{\mu_0}{12\pi c^3} |p|^2 \omega^4 \end{aligned}$$

Diese starke Frequenzabhängigkeit der Leistung ist verantwortlich für den blauen Himmel. Das Sonnenlicht regt die Dipole der Luft zu Schwingungen an. Da $\lambda_{rot} > \lambda_{blau}$ (oder $\omega_{rot} < \omega_{blau}$) ist die von den atmosphärischen Molekülen absorbierte Energie sowie die Intensität der reemittierten Strahlung bei höheren Frequenzen größer.