Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Wir beginnen mit einer kurzen Zusammenfassung einiger Dinge, die am Ende des vorigen Semesters behandelt wurden.

Neben dem **Relativitätspostulat**

> Die Gesetze der Physik gelten für Beobachter in allen Inertialsystemen gleichermaßen. Kein Inertialsystem ist vor dem anderen bevorzugt.

bildet das **Postulat von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit**

> Im Vakuum breitet sich Licht in allen Richtungen und in allen inertialen Bezugssystemen mit derselben Geschwindigkeit c aus.

den Kern- und Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie Einsteins.

Als Konsequenzen der beiden Postulate haben wir die **Zeitdilatation**

> *bewegte Uhren gehen langsamer*
>
> $$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$$
>
> Δt: Zeitdifferenz zwischen zwei am selben Ort stattfindenden Ereignissen einer dort ruhenden Uhr.
> $\Delta t'$: Zeitdifferenz zwischen denselben Ereignissen in einem gegenüber dem Ruhsystem mit der Geschwindigkeit v bewegten Inertialsystem.

sowie die **Lorentzkontraktion**

> *bewegte Maßstäbe sind in Bewegungsrichtung verkürzt*
>
> $$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}L$$
>
> L: Länge des Maßstabs in seinem Ruhsystem
> L': Vom ruhenden Beobachter wahrgenommene Länge des mit der Geschwindigkeit v bewegten Maßstabs.

kennengelernt.

Zeitdilatation und Lorentzkontraktion bestimmen, wie Raum- und Zeitkoordinaten zweier relativ zueinander bewegter Inertialsysteme miteinander verknüpft sind. Die zugehörige *Koordinatentransformation* ist die **Lorentz-Transformation**. Bezeichnen ungestrichene Größen die Raum-Zeit-Koordinaten in einem Bezugssystem, in dem der Beobachter ruht, und demgegenüber gestrichene Koordinaten diejenigen, die er bezüglich eines sich mit der Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung

bewegten Inertialsystems feststellt, wenn der Ursprung beider Koordinatensysteme zur Zeit $t = 0$ übereinstimmt, so gilt zwischen den Koordinaten die Beziehung

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Zeitdilatation und Lorentzkontraktion aus “Sicht der Lorentz-Transformation

Wir haben im letzten Semester Zeitdilatation und Lorentzkontraktion durch geeignete Messungen aus der Forderung nach der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit hergeleitet. Wir wollen diese nun durch Anwendung der Lorentz-Transformationen “wiederentdecken”.

Betrachten wir zunächst die **Zeitdilatation**:

Eine am Ort x ruhende Uhr zeigt zwischen zwei dort stattfindenden Ereignissen die Zeitspanne Δt an. Mit Hilfe der Lorentz-Transformation ermitteln wir nun die Zeitdifferenz zwischen den beiden Ereignissen, die im bewegten Bezugssystem an verschiedenen Orten stattfinden. Die Raumzeitkoordinaten der beiden Ereignisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	I	I'
Ereignis A	t_A	$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_a\right)$
	x_A	$x'_A = \gamma(x_A - vt_A)$
	y_A	$y'_A = y_A$
	z_A	$z'_A = z_A$
Ereignis B	t_B	$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_a\right)$
	$x_B = x_A$	$x'_B = \gamma(x_B - vt_B)$
	$y_B = y_A$	$y'_B = y_B$
	$z_B = z_A$	$z'_B = z_B$

Die Zeitspanne, die im bewegten Koordinatensystem zwischen den beiden Ereignissen vergangen ist, beträgt

$$\begin{aligned}\Delta t' = t'_B - t'_A &= \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A - t_B + \frac{v}{c^2}x_B\right)\\ &= \gamma\left(t_A - t_B - \frac{v}{c^2}(x_A - x_B)\right)\\ &= \gamma\Delta t\end{aligned}$$

Wenden wir uns nun der **Lorentzkontraktion** zu:

Im bewegten Inertialsystem hat ein Maßstab die *Ruhelänge L'*. Welche Länge misst man im Bezugsystem des ruhenden Beobachters?

Hierzu müssen wir zunächst die Lorentz-Transformation umkehren, da nun die Länge und die Zeitdifferenz im bewegten System vorgegeben sind:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \qquad \mid \cdot v\\ x' &= \gamma\left(x - vt\right)\end{aligned}$$

$$\rightarrow x' + vt' = \gamma \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\frac{1}{\gamma^2}} x$$

$$\rightarrow x = \gamma(x' + vt')$$

bzw.

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad \Big| \cdot \frac{v}{c^2}$$

$$\rightarrow t' + \frac{v}{c^2}x' = \gamma \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{\frac{1}{\gamma^2}} t$$

$$\rightarrow t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$$

hätte man auch erraten können – oder?

Nun können wir die Koordinatentransformationen durchführen:

	I	I'
Position des	x'_L	$x_L = \gamma(x'_L + vt'_L)$
Maßstabs	$x'_R = x'_L + L'$	$x_R = \gamma(x'_R + vt'_R)$
	t'_L	$t_L = \gamma\left(t'_L + \frac{v}{c^2}x'_L\right)$
	t'_R	$t_R = \gamma\left(t'_R + \frac{v}{c^2}x'_R\right)$

Im Ruhsystem des Beobachters muss die Längenmessung so durchgeführt werden, dass Anfangs- und Endposition zur gleichen Zeit bestimmt werden. Das hat zur Folge, dass die Messung im Ruhsystem des Maßstabs nicht gleichzeitig ist, d.h. $t'_L \neq t'_R$. Dies stellt kein Problem dar, da der Maßstab in I' ruht, d.h. seine Koordinaten sind stets dieselben.

$$\Delta t = 0 \Rightarrow \gamma(t'_R - t'_L) = -\gamma\frac{v}{c^2}(x'_R - x'_L)$$

$$\Rightarrow x_R - x_L = \gamma\left(x'_R - x'_L + v(t'_R - t'_L)\right)$$
$$= \gamma\left(L' - \frac{v^2}{c^2}L'\right)$$
$$= \gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)L' = \frac{1}{\gamma}L'$$

Relativistische Geschwindigkeitsaddition

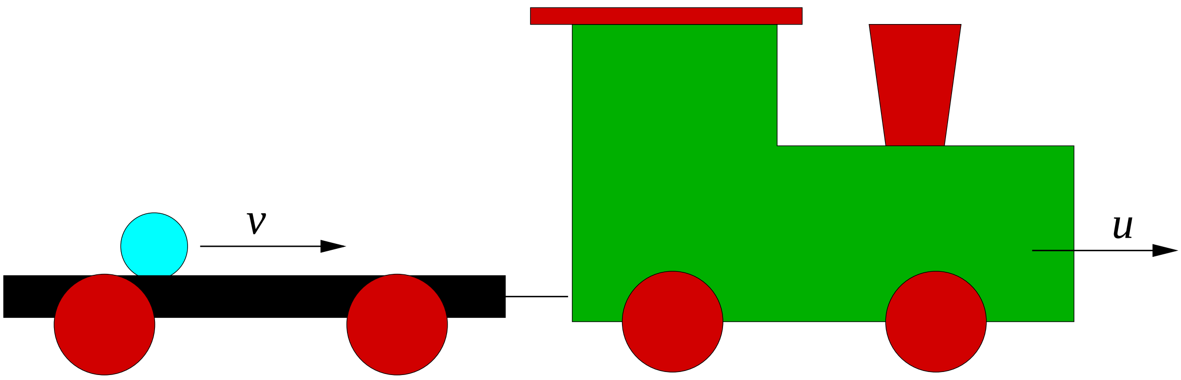
Aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in relativ zueinander bewegten Inertialsystemen folgte unmittelbar, dass die Gesetzmäßigkeitn unserer nicht-relativistischen Alltagserfahrung bzgl. der Addition von Geschwindigkeiten im Kontext großer Geschwindigkeiten nicht mehr zutreffen. Wir wollen uns daher nun damit beschäftigen, welche Relation zwischen den in zwei zueinander bewegten Inertialsystemen gemessenen Geschwindigkeiten besteht.

Wir bezeichnen weiterhin als Geschwindigkeit eines (Punkt-)Teilchens den Quotienten aus der zurückgelegten

Wegstrecke und der dafür benötigten Zeit:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Betrachten wir nun folgende Situation:



Ein Zug bewegt sich gegenüber dem Bezugssystem "Schiene" mit der Geschwindigkeit u. Im Zug rollt eine Kugel mit der konstanten Geschwindigkeit v relativ zum Zug.

Frage: Welche Geschwindigkeit der Kugel misst ein Beobachter, der relativ zu den Schienen ruht?

Formal können wir dies Problem mit Hilfe der Lorentz-Transformation lösen:

Wir bezeichnen das Inertialsystem "Zug" mit I'. Die Bahngleichung der Kugel hat in I' die Form

$$x'(t') = vt'.$$

Mit Hilfe der Lorentz-Transformation erhalten wir daraus die Bahngleichung im Inertialsystem "Schiene" ($= I$) zu

$$x' = \gamma_u(x - ut) = vt' = v\gamma_u(t - \frac{u}{c^2}x)$$

$$\Rightarrow \gamma_u \left(1 + \frac{vu}{c^2}\right) x = \gamma_u(v + u)t$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}} = v_I}$$

Übungsaufgabe:

(i) Machen Sie sich das Ergebnis plausibel
(ii) Angenommen, die Kugel hat eine Geschwindigkeitskomponente v_y senkrecht zu v. Wie transformiert sich diese Geschwindigkeitskomponente?